

# AUTOMATA dan BAHASA FORMAL

## “Pumping Lemma”

**Aris Eka Subiyanto**  
Zira\_ilkom@yahoo.com

**Lisensi Dokumen:**

Copyright © 2003 IlmuKomputer.Com

Seluruh dokumen di **IlmuKomputer.Com** dapat digunakan, dimodifikasi dan disebarakan secara bebas untuk tujuan bukan komersial (nonprofit), dengan syarat tidak menghapus atau merubah atribut penulis dan pernyataan copyright yang disertakan dalam setiap dokumen. Tidak diperbolehkan melakukan penulisan ulang, kecuali mendapatkan ijin terlebih dahulu dari **IlmuKomputer.Com**.

### 1. PENDAHULUAN

Koleksi bahasa reguler atas  $\Sigma$  terdiri dari bahasa kosong, semua bahasa singleton, termasuk  $\{ \epsilon \}$ , dan bahasa yang dibentuk oleh operasi – operasi bahasa perangkaian, gabungan, dan penutup bintang.

Suatu bahasa reguler dapat didefinisikan oleh suatu Ekspresi reguler dan secara bersamaan pula dapat didefinisikan dalam suatu Finite Automata yang mengenali string-string dalam bahasa yang dimaksud. Jika suatu bahasa  $L$  berhingga maka  $L$  Reguler, karena segera dapat kita bangun suatu Ekspresi reguler dan finite Automata yang relevan; tapi bagaimana misalnya jika diberikan suatu bahasa atas  $\Sigma$  yang tak berhingga ?, Apakah bahasa tersebut reguler atau merupakan bahasa yang nonreguler?. Dibutuhkan suatu sifat yang dimiliki oleh bahasa reguler yang tidak tampak dalam suatu bahasa non reguler sehingga diperlukan metode pembeda atau verifikasi apakah bahasa tersebut reguler atau non reguler.

Pada tahun 1961, **Pumping Lemma** yang merupakan metode untuk membuktikan regularitas dan iregularitas suatu bahasa ditemukan oleh Yehoshua Bar-Hillel, Micha A. P, dan Eliahu Shamir. “ Pumping “ adalah menambahkan panjang string pada bagian tengah word, tanpa mengubah bagian depan dan belakang dari suatu string. “ Lemma “ dalam hal ini adalah Teorema khusus yang membantu dalam membuktikan bahwa bahasa yang diuji adalah nonreguler.

Tujuan pembahasan kali ini adalah menunjukkan ( dibuktikan dengan Pumping Lemma ) bahwa dalam suatu bahasa tak terhingga yang diujikan terdapat kemungkinan bahwa bahasa tersebut adalah bahasa reguler atau nonreguler.

## 2. DESKRIPSI DAN PEMBUKTIAN

Pada bagian ini akan diberikan definisi bahasa Nonreguler dan kemudian ditunjukkan beberapa teorema untuk menunjukkan Iregularitas suatu bahasa.

### 2.1 Definisi Bahasa non Reguler

#### Definisi 1. :

Suatu bahasa yang tidak dapat didefinisikan oleh Ekspresi reguler disebut bahasa Nonreguler.( Cohen, I.A Daniel )

Sesuai pembuktian Teorema Kleene 1956, maka suatu bahasa non reguler juga tidak akan diterima pada suatu finite Automata.

### 2.2 Teorema Dasar dan Contoh

#### 2.2.1 TEOREMA I

L adalah bahasa reguler yang mempunyai kumpulan string-string tak hingga. Maka terdapat tiga string  $x, y, z$  (  $y$  bukan null string ) sedemikian hingga

$$xy^n z \text{ for } n = 1, 2, 3, \dots$$

adalah untai –untai pada L

### Proof I

Jika  $L$  adalah bahasa reguler, maka terdapat FA yang secara pasti menerima String-string di  $L$ . Seperti halnya FA – FA yang lainnya, mesin tersebut hanya mempunyai state-state yang terbatas, tetapi  $L$  mempunyai string-string yang tak hingga. Hal ini berarti terdapat panjang string-string yang berbeda dalam  $L$ . Misalkan terdapat  $w$  yang merupakan beberapa untai pada  $L$  yang mempunyai panjang string lebih dari jumlah state yang ada pada mesin. Ketika untai-untai tersebut menghasilkan suatu path dalam mesin, path tersebut tidak bisa beranjak ke state yang baru untuk setiap abjad dalam string karena terdapat jumlah abjad ( mengindikasikan panjang string ) yang lebih banyak daripada jumlah state pada mesin. Maka pastilah terjadi balikan ke state yang sama / terjadi siklus. Misal  $w$  dipisahkan menjadi tiga bagian :

**Bagian 1** : Seluruh abjad-abjad pada  $w$  sebelum siklus terjadi,  $x$  bisa merupakan null string.

**Bagian 2** :  $y$  adalah bagian dalam siklus itu. Karena pasti terdapat sirkuit,  $y$  tidak diperbolehkan null string

**Bagian 3** :  $z$  adalah bagian setelah siklus .  $z$  bisa dimungkinkan terbangun dari null string

Sehingga  $w = xyz$

Untuk  $w = xy^n z$  , juga merupakan untai yang diterima pada  $L$

**Teladan 1:**  $L = \{ a^n b^n \text{ for } n = 0, 1, 2, \dots \}$

Buktikan bahwa bahasa diatas adalah nonreguler ?

Jawab : - Harus berlaku  $xy^n z$  berada di  $L$  :

Type untai yang dihasilkan  $L$

aaa...aaaabbbb...bbb

Kita pisahkan menjadi 3 bagian  $x, y, z$  !

1 . Jika kita buat  $y$  adalah keseluruhan  $a$  maka terjadi jumlah  $a$  akan lebih banyak daripada  $b$  pada saat “pemompaan”  $xy^2 z$  dan untuk  $n > 2$

2. Jika kita buat  $y$  adalah keseluruhan  $b$  maka terjadi jumlah  $b$  akan lebih banyak daripada  $a$  pada saat “pompaan”  $xy^2z$  dan untuk  $n > 2$

3. Solusinya adalah dengan mengganti  $y$  dengan beberapa  $a$  dan beberapa  $b$ , dimana jumlah  $a$  sama dengan  $b$ . sehingga misal  $y$  terdiri dari substring  $ab$  maka untuk pompaan  $xy^2z$  dihasilkan untai  $xababz$ , tetapi setiap untai di  $L$  terdapat sekali muncul untai  $ab$ , maka dari itu Pumping lemma tidak bisa diaplikasi pada  $L$ .

**Kesimpulan :  $L$  adalah nonreguler**

### 2.2.2 TEOREMA II

$L$  adalah bahasa reguler tak berhingga yang diterima oleh suatu Finite Automata dengan  $N$  state. Maka untuk semua untai  $w$  di  $L$  yang mempunyai panjang string melebihi  $N$  terdapat untai  $x, y, z$ ,

Dengan  $y$  bukan null string

Dan  $|xy| \leq N$

**Sehingga :**

$$w = xyz$$

dan semua string pada pola

$$xy^n z, (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Untai diterima  $L$

Akhirnya  $L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w \}$ ,  $L(G)$  adalah himpunan keseluruhan kalimat yang dapat diperoleh dengan menurunkan dimulai simbol start,  $S$  dengan mengaplikasi aturan produksi.

**Teladan 2 :**

$$\begin{aligned} \text{PRIMA} &= \{ a^p \mid P \text{ adalah bilangan prima} \} \\ &= \{ aa, aaa, aaaaa, aaaaaa, \dots \} \end{aligned}$$

Buktikan bahwa bahasa diatas adalah nonreguler ?

Jawab :

Misal :

- Diasumsikan “ PRIMA “ adalah bahasa reguler sehingga terdapat suatu FA yang menerima bahasa tersebut.
- Diasumsikan terdapat misalnya 345 state, dan untuk memenuhi lemma misal kita buat  $p = 347$ , dan  $n = 348$  sehingga :

Dengan Pumping Lemma, untai  $xy^{348}z$  harus berada pada “PRIMA”.

**Maka:**

1.  $xy^{348}z = xyzy^{347}$  ( penguraian bisa terjadi karena  $w$  merupakan kumpulan a-a )

1.1 karena  $p = 347$  :  $xyz y^{347} = a^{347} y^{347}$

1.2 Karena kita tahu bahwa  $y$  adalah substring yang terdiri dari abjad a-a tak kosong maka misal  $y = a^m$ , dengan  $m$  adalah integer maka :

$$\begin{aligned} a^{347} y^{347} &= a^{347} (a^m)^{347} \\ &= a^{347(m+1)} \end{aligned}$$

2. Berdasarkan 1.2 didapat bahwa ada suatu element PRIMA pada pola  $a^{347(m+1)}$ . Karena  $m \neq 0$ , kita tahu bahwa  $347(m+1)$  bukan bilangan prima. Tetapi ini bertentangan dengan asumsi maka :

**Kesimpulan: L adalah nonreguler**

### **3. PENUTUP**

Bahasa reguler dan bahasa reguler terdapat dalam suatu bahasa yang takterhingga, maka perlu diperlukan metode pembuktian terhadap suatu bahasa tak berhingga apakah merupakan bahasa reguler atau nonreguler. Dibutuhkan suatu sifat yang dimiliki oleh bahasa – bahasa reguler yang tidak tampak dalam bahasa nonreguler. Metode Pumping lemma berfungsi sebagai teori yang membantu pembuktian tersebut. Dengan metode Pumping lemma diandaikan bahwa suatu bahasa yang akan diuji adalah bahasa reguler, dengan aplikasi pumping lemma akan diketahui apakah terjadi kontradiksi terhadap asumsi atau mendukung asumsi, kontradiksi mengisyaratkan bahasa nonreguler sementara mendukung mengisyaratkan diterima sebagai bahasa reguler.

### **4. REFERENSI**

Cohen, Daniel I. A, Introduction to Computer Theory, John Wiley & Sons, Inc. Singapura : Singapura, 1991.

Kelley, Dean. Otomata Dan Bahasa Formal, PT.Prenhalindo, Jakarta : Indonesia

Wang, Randy. <http://www.cs.Princeton.edu/courses/C126>

## BIOGRAFI PENULIS



### **Aris Eka Subiyanto.**

Lahir di Kota dingin Malang, 11 Januari 1984. Menempuh Pendidikan Dasar hingga menengah di Tumpang – Malang. Sempat mengenyam pendidikan ala Teknik – Teknik sipil, menikmati indahnya Sastra Inggris – ala Humaniora dan pelabuhan terakhir tersintesakan dalam Ilmu Komputer - ala Science Universitas Brawijaya Malang. Bersyukur bisa menikmati Indahnya Ilmu Komputer beserta keseluruhan kompleksitasnya kendatipun masih ada banyak dan terlalu banyak hal lagi yang masih perlu diselami dari disiplin baru “mengagumkan” ini.

Aktif mengajar di LBB, asistensi praktikum keMIPAan dan sangat tertarik dengan dunia pendidikan khususnya pendidikan Matematika dan Ilmu Komputer. Rindu mendalami aspek *Philosophy Computer Science* karena memimpikan Indonesia yang tidak hanya menjadi negara pengekspor beras, gula, jagung saja tapi ekspor theory suatu saat nanti. Pendengar Lagu sweet Jazz,

Gending Jawa, Chorale beserta main musiknya....

*Ngelmu iku,  
kalakone kanthi laku,  
lekasane lawan kas,  
tegese kas nyantosani,  
Setya budya pangekese dur angkara. ( Serat Wedhatama )*

Alamat Kontak :  
Zira\_ilkom@yahoo.com