

Penyelesaian Sejumlah Persoalan Matematika Terapan dengan Matlab/GNU Octave

Saifuddin Arief
Saifuddin.Arief@rocketmail.com

Lisensi Dokumen:

Copyright © 2003-2019 IlmuKomputer.Com

Seluruh dokumen di IlmuKomputer.Com dapat digunakan, dimodifikasi dan disebarkan secara bebas untuk tujuan bukan komersial (nonprofit), dengan syarat tidak menghapus atau merubah atribut penulis dan pernyataan copyright yang disertakan dalam setiap dokumen. Tidak diperbolehkan melakukan penulisan ulang, kecuali mendapatkan ijin terlebih dahulu dari IlmuKomputer.Com.

Pada artikel ini akan diberikan contoh penyelesaian dari beberapa persoalan komputasi numerik yang muncul dalam bidang matematika terapan, sains dan rekayasa dengan menggunakan GNU Octave atau Matlab.

Contoh 1.

Sebuah kota kecil dengan penduduk 1000 orang terkena suatu wabah penyakit menular. Jumlah orang yang sakit setelah t hari semenjak menyebarnya wabah penyakit dapat dimodelkan dengan fungsi sebagai berikut:

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 999 \cdot e^{(-0.603t)}}$$

Mengacu pada formula di atas, jumlah penduduk yang sakit 10 hari setelah menyebarnya penyakit dapat diestimasi sebagai berikut:

```
>> P = 1000/(1 + 999*exp(-0.603*10))  
P = 293.85  
>> round(P)  
ans = 294
```

Diperoleh jumlah orang yang sakit semenjak 10 hari menyebarnya wabah penyakit adalah 294 orang.

Contoh 2.

Apabila pertumbuhan populasi penduduk dianggap bertambah secara eksponensial maka jumlah penduduk pada awal suatu tahun tertentu dapat dihitung dengan formula:

$$y = y_0 e^{kt}$$

dimana y_0 adalah jumlah penduduk pada awal tahun acuan, k adalah laju pertambahan penduduk dan t adalah perbedaan waktu terhadap tahun acuan

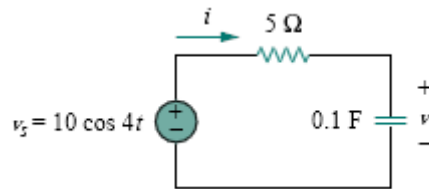
Misalkan jumlah penduduk dunia pada awal tahun 1990 adalah sekitar 5.3 milyar dengan laju pertumbuhan penduduk sekitar 2% per tahun. Maka perkiraan penduduk dunia pada awal tahun 2015 adalah sebagai berikut:

```
>> y0 = 5.3;           # jumlah penduduk pada awal th 1990 (milyar)
>> k = 0.02;          # laju pertumbuhan pertahun
>> t = 2015-1990;     # selang waktu sejak awal th 1990 (tahun)
>> y = y0*exp(k*t)    # jumlah penduduk pada awal th 2015 (milyar)
y = 8.7382
```

Jadi jumlah penduduk dunia pada awal tahun 2015 adalah sebanyak 8.73 milyar.

Contoh 3.

Berikut ini sebuah rangkaian listrik dengan sumber tegangan $v_s = 10 \cos(4t)$, $\omega = 4$.



Gambar 1

Anggap V_s adalah notasi fasor untuk sumber tegangan.

```
>> Vs = 10;           # Fasor untuk sumber tegangan
```

Impedansi pada rangkaian tersebut dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C}$$

Dengan menggunakan rumus tersebut dan data-data yang terdapat pada gambar di atas maka fasor untuk impedansi Z dapat dihitung sebagai berikut:

```
>> omega = 4;
>> R = 5;           # Tahanan (ohm)
>> C = 0.1;        # Kapasitor (F)
>> Z = R + 1/(i*omega*C)
Z = 5.0000 - 2.5000i
```

Selanjutnya, arus yang mengalir dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$I = \frac{V_s}{Z}$$

Menggunakan formula ini, arus yang mengalir pada rangkaian dapat dihitung sebagai berikut:

```
>> I = Vs/Z
I = 1.60000 + 0.80000i
>> Im = abs(I)
Im = 1.7889
```

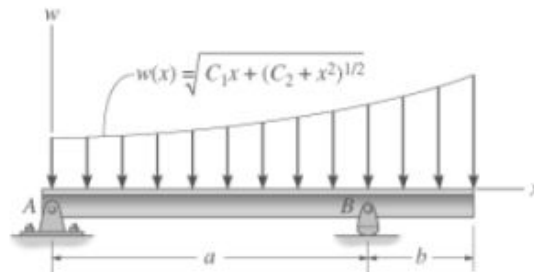
```
>> theta = atand(imag(I)/real(I))
theta = 26.565
```

Jadi arus yang mengalir pada rangkaian adalah $i(t) = 1.789 \cos(4t + 26.57^\circ) A$.

Contoh 4.

Sebuah beban yang bekerja di atas sebuah balok mempunyai intensitas beban seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah. Intensitas beban tersebut dihipotesis dengan fungsi sebagai berikut:

$$w = \sqrt{c_1x + \sqrt{c_2 + x^2}} \text{ N/m}$$



Gambar 2

Diketahui : $c_1 = 5 \text{ m}$; $c_2 = 16 \text{ m}$; $a = 3 \text{ m}$; $b = 1 \text{ m}$.

Resultan beban (F) yang bekerja pada balok dan letaknya (d) dapat dihitung dengan formula sebagai berikut

$$F = \int_0^{a+b} w(x) dx$$

$$d = \frac{\int_0^{a+b} xw(x) dx}{\int_0^{a+b} w(x) dx}$$

Nilai integral tertentu dari fungsi fct dengan batas integral x_l dan x_r dapat dihitung dengan fungsi `integral(fct,xl,xr)`.

Berikut ini perhitungan resultan beban (F) dan letaknya (d).

```
>> w = @(x) sqrt(5*x + sqrt(16 + x.^2));
>> F = integral(w,0,4)
F = 14.885
>> wx = @(x) w(x)*x;
>> M = integral(wx,0,4)
M = 33.735
>> d = M/F
d = 2.2664
```

Jadi resultan gaya dari beban yang bekerja adalah 14.885 N yang terletak 2.266 m dari kiri balok.

Contoh 5.

Gambar 3 adalah sebuah rangkaian listrik sederhana. Penentuan arus I_1 , I_2 dan I_3 yang mengalir pada rangkaian tersebut dapat ditentukan dengan hukum Kirchoff.

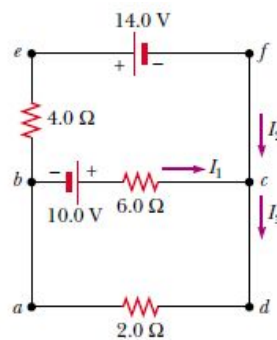
Hukum Kirchoff tentang arus menyatakan bahwa jumlah arus yang masuk pada suatu titik percabangan adalah sama dengan jumlah arus yang keluar dari titik percabangan tersebut. Berikut ini persamaan didapatkan dengan menerapkan hukum tersebut.

$$i_1 + i_2 = i_3$$

Selanjutnya, hukum Kirchoff tentang tegangan menyatakan bahwa jumlah total tegangan yang terdapat pada suatu rangkaian listrik yang tertutup adalah sama dengan nol. Dengan menerapkan hukum ini kita dapat mendapatkan persamaan-persamaan sebagai berikut:

$$10 - 6i_1 - 2i_3 = 0$$

$$-14 + 6i_1 - 10 - 4i_2 = 0$$



Gambar 3

Dari persamaan-persamaan di atas diperoleh persamaan linier sebagai berikut:

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

$$6i_1 + 2i_3 = 10$$

$$6i_1 - 4i_2 = 24$$

Anggap A merupakan matrik koefisien dari persamaan linier dan b adalah vektor yang menyatakan koefisien pada sisi kanan persamaan.

```
>> A = [1 1 -1; 6 0 2; 6 -4 0]
```

```
A =
```

```
1 1 -1
6 0 2
6 -4 0
```

```
>> b = [0; 10; 24]
```

```
b =
```

```
0
10
24
```

Arus yang mengalir pada rangkaian dapat dihitung sebagai berikut:

```
>> i = A\b
```

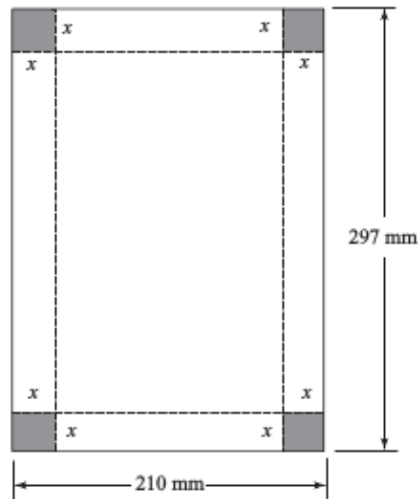
```
i =
```

```
2.0000
-3.0000
-1.0000
```

Diperoleh arus yang mengalir pada setiap tahanan yaitu $i_1 = 2$, $i_2 = -3$, $i_3 = -1$. (Tanda negatif berarti arah arus berlawanan dengan arah yang diasumsikan pada gambar).

Contoh 6.

Sebuah kotak segi empat yang terbuka atasnya akan dibuat dari sebuah pelat besi yang berukuran 210 mm × 297 mm dengan cara memotong bujur sangkar yang mempunyai sisi x mm pada keempat ujungnya kemudian melipat ke atas dan menyambung bagian-bagian yang dipotong tersebut.



Gambar 4

Persoalan ini merupakan persoalan optimasi satu dimensi yang dapat diselesaikan dengan fungsi `fminunc`. Fungsi tersebut dapat dijalankan dengan sintaks `fminunc(fobj,x0)` adalah adalah fungsi untuk menentukan nilai minimum dari fungsi obyektif `fobj` dengan nilai awal `x0`.

Volume kotak maksimum dapat dihitung dengan menggunakan perintah-perintah sebagai berikut:

```
>> function y = fobj(x)
    y = -(210 - 2*x)*(297 - 2*x)*x;      # y = -volume kotak
endfunction
>> [x, fopt] = fminunc(@fobj, 50)
x = 40.423
fopt = -1.1285e+06
```

Volume maksimum diperoleh dengan memotong bujur sangkar pada keempat ujung pelat dengan lebar 40.423 mm. Nilai volume maksimum kotak adalah $1.1285 \times 10^6 \text{ mm}^3$.

Contoh 7.

Sebuah kaleng soda diletakkan di dalam sebuah kulkas. Anggap temperatur kaleng soda adalah 25° C dan temperatur ruangan di dalam kulkas adalah 10° C serta koefisien konduksi dari kaleng soda adalah 0.05.

Penurunan temperatur kaleng soda dalam kulkas dapat dimodel dengan menggunakan persamaan diferensial sebagai berikut:

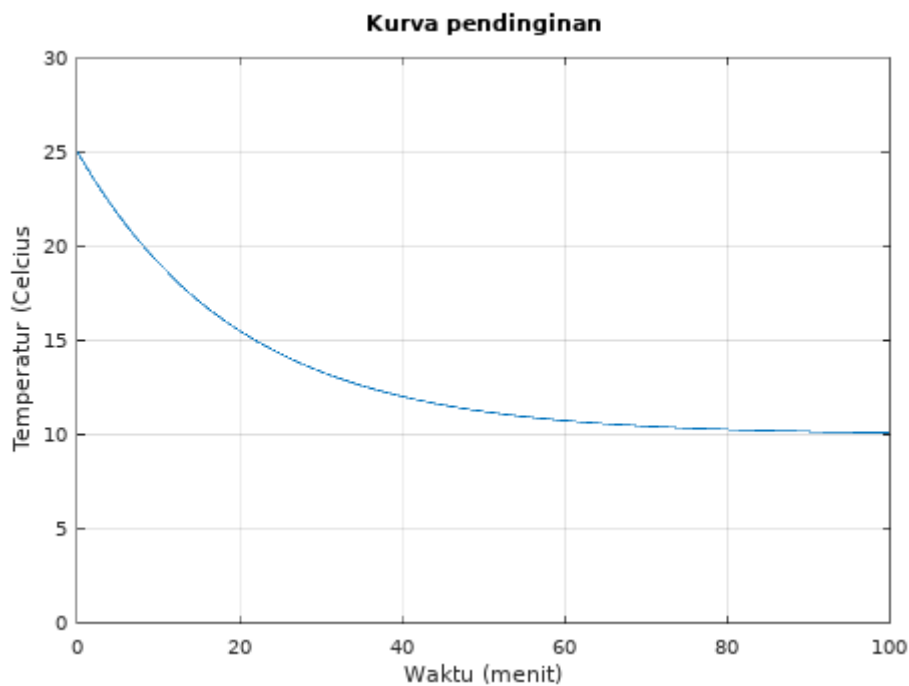
$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

Persamaan diferensial orde pertama dengan nilai awal dapat diselesaikan dengan menggunakan fungsi `ode45(fcn,t,x0)`. Di mana `fcn` adalah fungsi yang menyatakan persamaan diferensial, `x0` adalah nilai awal dan `t` adalah rentang waktu penyelesaian.

Berikut ini perintah-perintah untuk menyelesaikan persamaan diferensial di atas.

```
>> function Tdot = fTemp(t,T)
    k = 0.05;           % koefisien konduksi
    Ta = 10;           % suhu ruangan kulkas
    Tdot = -k*(T - Ta);
endfunction
>> T0 = 25;
>> t = linspace(0, 100, 1000);
>> [t,T] = ode45(@fTemp,t,T0);
>> plot(t,T)
>> axis([0 100 0 30])
>> xlabel('Waktu (menit)');
>> ylabel('Temperatur (Celcius)');
>> title('Kurva pendinginan');
```

Fungsi fTemp adalah fungsi yang merepresentasikan persamaan diferensial, variabel T0 adalah nilai awal kemudian t merupakan rentang waktu penyelesaian.



Gambar 5

Penurunan temperatur kaleng soda dalam kulkas adalah seperti yang diperlihatkan pada gambar 5. Dari gambar tersebut terlihat bahwa setelah menit ke 100 maka temperatur kaleng soda akan sama dengan temperatur kulkas.